

Devoir sur Table 3

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vos résultats en les encadrant ou les soulignant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
 - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
 - L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Exercice 1*(D'après Ecricome 2020)*

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels. Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et on note alors $(R_{1,n})_{n \geq 0}$ la suite de restes de cette série, autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Si à nouveau la série de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre 2 et on note $R_{2,n}$ la suite de reste de cette série, autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}$$

Plus généralement, pour tout entier $p \geq 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre p et on note alors $(R_{p,n})_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de restes de cette série :

$$R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}$$

On peut noter : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{0,n} = u_n$. Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de la convergence de la série de terme général u_n .

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère, dans cette question seulement, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$

(a) Rappeler la condition nécessaire et suffisante sous laquelle $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

On se place désormais sous cette condition.

(b) Pour tout entier $k \geq 2$, justifier que

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^\alpha} dt$$

(c) En déduire que, pour tout $n \geq 1$

$$\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

(d) En déduire que

$$R_{1,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

(e) Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur α la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge-t-elle à l'ordre 2 ?

(f) Conjecturer à quel ordre la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

2. On considère, dans cette question seulement, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^n}$

(a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

(b) Montrer que, pour tout $k \geq 3$, $u_k \leq \frac{1}{3^k}$, puis en déduire que, pour tout $n \geq 2$

$$0 \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{2 \cdot 3^n}$$

(c) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre 2 et que, pour tout $n \geq 1$

$$0 \leq R_{2,n} \leq \frac{1}{4 \cdot 3^n}$$

(d) Montrer que, pour tout $p \geq 2$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre p et que, pour tout $n \geq 1$

$$0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$$

(e) La série $\sum_{n \geq 1} R_{n,n}$ converge-t-elle ?

3. On considère, dans cette question seulement, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

(a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

(b) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = 0$$

(c) Soit $N \in \mathbb{N}$, en remarquant que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k dt$, montrer que

$$\sum_{n=0}^N u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt$$

(d) En déduire que, pour tout $n \geq 0$

$$R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt$$

- (e) Montrer par récurrence que, pour tout entier $p \geq 1$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre p et que, pour tout $n \geq 0$

$$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} dt$$

Problème

(Banque PT Maths A 2009)

Dans tout le problème, n est un entier strictement positif, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie n , $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E , Id_E l'identité de E et $0_{\mathcal{L}(E)}$ l'endomorphisme nul sur E .

Partie I

1. Dans cette question, E est de dimension 2. On considère la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E . On considère l'application linéaire f ayant pour matrice, dans la base \mathcal{B} :

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Montrer que f est un projecteur. Quel est son rang ?
 (b) Déterminer le noyau et l'image de f
2. Dans cette question, E est de dimension 3. On considère la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E . D désigne la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\varepsilon_1 = e_1 + 3e_2 - e_3$ et P le plan engendré par les vecteurs $\varepsilon_2 = e_1 - e_3$ et $\varepsilon_3 = 2e_1 - e_2$.

Déterminer la matrice, dans la base \mathcal{B} , du projecteur sur P parallèlement à D .

3. L'espace vectoriel E est désormais muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

La norme du vecteur $x \in E$ est notée $\|x\|$.

Enfin, le sous-espace orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de E sera noté F^\perp .

On rappelle qu'un projecteur de E est dit orthogonal lorsque son noyau et son image sont orthogonaux. Soit p un projecteur de E .

- (a) Montrer que si p est un projecteur orthogonal alors :

$$\forall u \in E, ; \quad \|p(u)\| \leq \|u\| \quad (\star).$$

- (b) Montrer que si (\star) est vérifiée, alors p est un projecteur orthogonal.

Partie II

On considère ici l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $n \geq 2$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\text{Tr}(A)$ la somme des coefficients de la diagonale de A et A^\top la matrice transposée de A .

On définit l'application φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} par :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \quad \varphi(A, B) = \text{Tr}(A^\top B).$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 2. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \right| \leq n \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}.$$

3. On note \mathcal{A}_n l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et \mathcal{S}_n l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que \mathcal{A}_n et \mathcal{S}_n sont deux sous-espaces orthogonaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 4. On note Φ la norme associée au produit scalaire φ .

Soit U une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exprimer $\Phi(MU)$ en fonction de $\Phi(M)$.

5. On considère dans cette question **uniquement** que $n = 2$. On désigne par F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- (a) Donner une base de F^\perp .
 (b) Déterminer la matrice A' , image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, par la projection orthogonale sur F .

Partie III

On considère l'application ψ de $\mathbb{R}_3[X]^2$ dans \mathbb{R} :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2, \quad \psi(P, Q) = \sum_{i=0}^3 P(i)Q(i)$$

1. Montrer que ψ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Soit $F = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.
 - (a) Calculer $\psi(1, 1)$, $\psi(1, X)$, $\psi(1, X^2)$, $\psi(X, X)$, $\psi(X, X^2)$ et $\psi(X^2, X^2)$.
 - (b) On note $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2)$ la base orthonormale de F telle que :

$$\forall k \in \{0, 1, 2\} \quad \text{Vect}(P_0, \dots, P_k) = \text{Vect}(1, \dots, X^k) \quad \text{et} \quad \psi(P_k, X^k) > 0.$$

Déterminer explicitement les polynômes P_0 , P_1 et P_2 .

3. Soit $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 2, 3)$.

On considère l'ensemble des sommes $\Sigma = \left\{ \sum_{i=0}^3 (x_i - P(i))^2, P \in F \right\}$.

- (a) Montrer qu'il existe un polynôme R et un seul, de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que :

$$\forall i \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad R(i) = x_i$$

- (b) Déterminer le projeté orthogonal du polynôme R sur le sous-espace vectoriel F .
 (c) Montrer alors que l'ensemble Σ possède un minimum atteint pour un polynôme $S \in F$ et un seul. Déterminer ce minimum.

Corrigé

Corrigé de l'exercice 1

1. (a) La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

(b) Soit $k \geq 2$,

Pour tout $t \in [k, k+1]$ on a $t \geq k$, d'où, puisque $\alpha > 0$, $\frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$

Par croissance de l'intégrale on en déduit que

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha} dt$$

C'est-à-dire

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha} (k+1 - k)$$

ou encore

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

De même, pour $t \in [k-1, k]$ on a $t \leq k$, d'où, puisque $\alpha > 0$, $\frac{1}{t^\alpha} \geq \frac{1}{k^\alpha}$

Par croissance de l'intégrale on en déduit que

$$\int_{k-1}^k \frac{1}{t^\alpha} dt \geq \int_{k-1}^k \frac{1}{k^\alpha} dt$$

C'est-à-dire

$$\int_{k-1}^k \frac{1}{t^\alpha} dt \geq \frac{1}{k^\alpha}$$

Finalement on a bien

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^\alpha} dt$$

(c) Soit $n \geq 1$, on sait que les intégrales $\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ et $\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ sont des intégrales de Riemann convergentes.

D'après la relation de Chasles, on en déduit que les séries $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^k \frac{1}{t^\alpha} dt$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt$ convergent et que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^k \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$$

et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

En sommant les relations obtenues à la question précédente, on a alors

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^k \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

C'est-à-dire

$$\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Remarque

Avant de faire une somme infinie d'inégalités, il est bon de vérifier que toutes les séries concernées convergent bien

(d) On sait que

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Or $\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ Ainsi, d'après le théorème de construction des équivalents par encadrements,

$$\boxed{R_{1,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}}$$

(e) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $R_{1,n} > 0$ en tant que somme de réels strictement positifs.

D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, les séries de terme général respectifs $R_{1,n}$ et $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ sont de même nature.

La série de terme général $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ est une série de Riemann qui converge si et seulement si $\alpha-1 > 1$, i.e. $\alpha > 2$.

Ainsi

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge à l'ordre 2 si et seulement si } \alpha > 2}$$

(f) On a vu que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre 1 si et seulement si $\alpha > 1$ et qu'elle à l'ordre 2 si et seulement si $\alpha > 2$.

On conjecture alors qu'elle converge à l'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si $\alpha > p$.

En d'autres termes, on conjecture que

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge à tous les ordres } p \text{ tels que } p < \alpha.}$$

2. On considère, dans cette question seulement, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^n}$

(a) Pour $n \geq 2$ on a $n^n \geq n^2$ et donc

$$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$$

La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs,

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge.}}$$

(b) Soit $k \geq 3$, on a alors $k \ln(k) \geq k \ln(3)$, d'où $k^k \geq 3^k$ et ainsi

$$\boxed{\forall k \geq 3, \quad 0 \leq u_k \leq \frac{1}{3^k}}$$

Les séries de terme général respectifs u_k et $\frac{1}{3^k}$ convergent. En sommant les inégalités obtenus on a alors, pour $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k}$$

Or

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{i+n+1}}$$

Remarque

Cette inégalité prouve par ailleurs aussi que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge par comparaison à une série géométrique convergente.

On pose le changement d'indice $i = k - n - 1$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3^{n+1}} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i \\
&= \frac{1}{3^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{3^{n+1}} \frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{2 \cdot 3^n}
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$0 \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{2 \cdot 3^n}$$

- (c) La série de terme général $\frac{1}{2} \frac{1}{3^n}$ est convergente en tant que série géométrique (multipliée par une constante) de raison $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} R_{1,n}$ converge. En d'autres termes

$$\text{La série } \sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge à l'ordre 2.}$$

De plus, en sommant les inégalités on a, pour $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{3^k}$$

Or $\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k} = R_{2,n}$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{4 \cdot 3^n}$. Ainsi

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq R_{2,n} \leq \frac{1}{4 \cdot 3^n}$$

- (d) On va procéder par récurrence sur p .

Plus précisément notons $\mathcal{A}(p)$ l'assertion

« La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre p et, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$ »

On a déjà montré que l'assertion est vraie pour $p = 1$ et $p = 2$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on suppose que l'assertion $\mathcal{A}(p)$ est vraie.

On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$$

La série de terme général $\frac{1}{2^p} \frac{1}{3^n}$ est convergente en tant que série géométrique (multipliée par une constante) de raison $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} R_{p,n}$ converge. En d'autres termes la série

$$\sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge à l'ordre } p + 1.$$

De plus, en sommant les inégalités on a, pour $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p} \frac{1}{3^k}$$

Or $\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} = R_{p+1,n}$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2^p} \frac{1}{2 \cdot 3^n} = \frac{1}{2^{p+1} 3^n}$. Ainsi

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq R_{p+1,n} \leq \frac{1}{2^{p+1} 3^n}$$

Ce qui prouve l'assertion au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

En conclusion

Pour tout entier $p \geq 1$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre p et

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$$

(e) D'après la question précédente on a, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq R_{n,n} \leq \frac{1}{2^n 3^n}$, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq R_{n,n} \leq \frac{1}{6^n}$$

La série de terme général $\frac{1}{6^n}$ est convergente en tant que série géométrique de raison $\frac{1}{6} \in]-1, 1[$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs,

la série $\sum_{n \geq 1} R_{n,n}$ converge.

3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \frac{(-1)^{n+2}}{n+2} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$

De plus, la suite $\left(\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right| \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

Ainsi, d'après le critère des séries alternées, $\sum u_n$ converge.

(b) Pour $t \in [0, 1]$ on a $1 + t \geq 1$ ainsi

$$\forall t \in [0, 1], \quad 0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$$

D'où, par croissance de l'intégrale

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt$$

C'est-à-dire

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+1}$$

D'après le théorème des gendarmes, on a ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

(c) Soit $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N u_n &= \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^N (-1)^n \int_0^1 t^n dt \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^N (-1)^n t^n dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{1 - (-t)^{N+1}}{1+t} dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\sum_{n=0}^N u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt$$

(d) On sait, d'après la question 3.(a) que la suite $\left(\int_0^1 \frac{t^{N+1}}{1+t} dt\right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 ainsi, d'après la question 3.(b) la suite $\left(\sum_{n=0}^N u_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln(2)$.

En d'autres termes $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln(2)$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a alors

$$\begin{aligned}
R_{1,n} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^n u_k \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \left(\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt \right) \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\forall n \geq 0, \quad R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt$$

(e) Pour $p \geq 1$, on définit l'assertion $\mathcal{A}(p)$

« La série $\sum_{n \geq 0} u_p$ converge à l'ordre p et, pour tout $n \geq 0$, $R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} dt$ »

La question précédente nous assure que l'assertion $\mathcal{A}(1)$ est vérifiée.

Soit $p \geq 1$, on suppose que l'assertion $\mathcal{A}(p)$ est vérifiée.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n R_{p,k} &= \sum_{k=0}^n \int_0^1 \frac{(-1)^{k+p}}{(1+t)^p} dt \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^n \frac{(-t)^{k+p}}{(1+t)^p} dt \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^p} \sum_{k=0}^n (-t)^k dt \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^p} \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} dt \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}} - \frac{(-t)^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}} dt \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}} dt
\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}} dt + (-1)^{n+p} \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}} dt$$

Pour $t \in [0, 1]$ on a $1+t \geq 1$ ainsi $(1+t)^p \geq 1$ et donc

$$\forall t \in [0, 1], \quad 0 \leq \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}} \leq t^{n+1+p}$$

Par croissance de l'intégrale on en déduit que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}} dt \leq \frac{1}{n+p+2}$$

Le théorème des gendarmes nous assure alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}} dt = 0$

On en déduit donc que la série de terme général $R_{p,k}$ converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} R_{p,k} = \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}} dt$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} R_{p+1,n} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} R_{p,k} - \sum_{k=0}^n R_{p,k} \\ &= \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}} dt - \left(\int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}} dt \right) \\ &= \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}} dt \end{aligned}$$

On a ainsi prouvé que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre $p+1$ et que, pour tout $n \geq 0$,

$$R_{p+1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}} dt. \text{ En d'autres termes on a prouvé l'assertion } \mathcal{A}(p+1).$$

Par principe de récurrence, on en conclut alors que

Pour tout entier p , la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre p et, pour tout $n \geq 0$, $R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^{p+1}} dt$

Corrigé de l'exercice

Partie I

1. (a) On a

$$M^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = M$$

Ainsi $f \circ f = f$. f est donc un projecteur.

De plus

$$\text{Rang}(f) = \text{Rang}(M) = \text{Rang} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right) = \text{Rang} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 1$$

Ainsi $\text{Rang}(f) = 1$.

(b) On sait que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2))$. Or $f(e_1) = \frac{1}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2 = -f(e_2)$, donc

$$\boxed{\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1)) = \text{Vect}(e_1 - 2e_2)}$$

De plus $e_1 - 2e_2 \neq 0_E$, donc $(e_1 - 2e_2)$ est libre. C'est ainsi une base de $\text{Im}(f)$.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $xe_1 + ye_2 \in \text{Ker}(f)$ si et seulement si $x - y = 0$. Ainsi

$$\boxed{\text{Ker}(f) = \text{Vect}(e_1 + e_2)}$$

2. Vérifions que $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est bien une base de E

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}'}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -6 \neq 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E .

Soit M' la matrice du projecteur p sur P parallèlement à D dans la base \mathcal{B}' . On a

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule P^{-1}

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) && L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) && L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2, \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) && L_2 \leftarrow L_2 - \frac{7}{3}L_3, \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) && L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \end{aligned}$$

Ainsi

$$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -7 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Notons M la matrice de p dans \mathcal{B} . D'après la formule de changement de bases on a $M = PM'P^{-1}$,

Finalement

$$M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Changement de bases

En général on va essayer d'éviter de se lancer dans un changement de bases explicites car les calculs peuvent être longs. Ici on n'a pas vraiment le choix ...

Remarque :

On peut procéder un peu différemment : le calcul de P^{-1} nous assure que $e_1 = \frac{1}{6}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 3\varepsilon_3)$, ainsi

$$\begin{aligned} p(e_1) &= \frac{1}{6} (p(\varepsilon_1) - p(\varepsilon_2) + 3p(\varepsilon_3)) \\ &= \frac{1}{6} (0 - \varepsilon_2 + 3\varepsilon_3) \\ &= \frac{1}{6} (e_3 - e_1 + 6e_1 - 3e_2) \\ &= \frac{1}{6} (5e_1 - 3e_2 + e_3) \end{aligned}$$

Puis procéder de même pour $p(e_2)$ et $p(e_3)$. En pratique on fait ici exactement les mêmes calculs que dans $PM'P^{-1}$ donc on ne gagne pas vraiment de temps.

3. (a) Soit p un projecteur orthogonal et $u \in E$.

On sait que $u = (u - p(u)) + p(u)$ avec $u - p(u) \in \text{Ker}(p)$ et $p(u) \in \text{Im}(p)$.

p étant un projecteur orthogonal, on a $\langle u | u - p(u) \rangle = 0$.

Ainsi, d'après le théorème de Pythagore,

$$\|u\|^2 = \|u - p(u) + p(u)\|^2 = \|u - p(u)\|^2 + \|p(u)\|^2 \geq \|p(u)\|^2$$

Puis, par croissance de la fonction racine carrée

$$\forall u \in E \quad \|p(u)\| \leq \|u\|$$

(b) Supposons que (\star) est vérifiée.

Soit $u \in \text{Ker}(p)$ et $v \in \text{Im}(p)$. On veut montrer que u et v sont orthogonaux.

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $w_t = tu + v$. On a $tu \in \text{Ker}(p)$, donc $p(w_t) = v$.

D'après (\star) , on a $\|p(w_t)\| \leq \|w_t\|$, d'où en passant au carré et en développant,

$$\|v\|^2 \leq \|v\|^2 + 2t\langle u, v \rangle + t^2\|u\|^2$$

Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 2t\langle u, v \rangle + t^2\|u\|^2 \geq 0$$

Si $u = 0_E$ alors on a clairement $\langle u, v \rangle = 0$.

Supposons $u \neq 0_E$, en évaluant notre relation en $t = \frac{-\langle u, v \rangle}{\|u\|}$ on a

$$\frac{-2\langle u, v \rangle^2}{\|u\|^2} + \frac{\langle u, v \rangle^2}{\|u\|^4} \|u\|^2 \geq 0$$

C'est-à-dire $\frac{-\langle u, v \rangle^2}{\|u\|^2} \geq 0$. Or $\frac{-2\langle u, v \rangle^2}{\|u\|^2} \leq 0$, ainsi $\langle u, v \rangle = 0$

Finalement $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont orthogonaux, donc p est un projecteur orthogonal.

Duplication

Lorsque, pour une question d'algèbre linéaire, vous avez une hypothèse du type « Pour tout $u \dots$ » et que vous cherchez à arriver à une conclusion du type « Pour tout couple $(v, w) \dots$ » pensez à appliquer votre hypothèse au couple $v + w$ ou bien aux couples $v + tw$ avec t réel.

Partie II

1. Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\varphi(\lambda A + B, C) = \text{Tr}((\lambda A + B)^\top C) = \text{Tr}(\lambda A^\top C + B^\top C) = \lambda \text{Tr}(A^\top C) + \text{Tr}(B^\top C) = \lambda \varphi(A, C) + \varphi(B, C).$$

Donc φ est linéaire à gauche.

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Alors

$$\varphi(A, B) = \text{Tr}(A^\top B) = \text{Tr}((A^\top B)^\top) = \text{Tr}(B^\top A) = \varphi(B, A)$$

Ainsi φ est symétrique et donc bilinéaire symétrique.

Remarquons que, si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors

$$\varphi(A, B) = \text{Tr}(A^\top B) = \sum_{j=1}^n (A^\top B)_{j,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (A^\top)_{j,i} B_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j}$$

En particulier

$$\varphi(A, A) = \text{Tr}(A^\top A) = \sum_{i=1}^n (A^\top A)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (A^\top)_{i,j} A_{j,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2 \geq 0.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(A, A) = 0$, ainsi $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2 = 0$. Or une somme de carrés étant nulle si et seulement si chacun des termes est nul, il vient alors

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{j,i}^2 = 0$$

Ainsi A est la matrice nulle.

Finalement φ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Posons $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ et $B = (1)_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients valent 1.

On a alors

$$\varphi(A, B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}$$

Et

$$\sqrt{\varphi(A, A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k}^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{\varphi(B, B)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n 1^2} = \sqrt{n^2} = n$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|\varphi(A, B)| \leq \sqrt{\varphi(A, A)} \sqrt{\varphi(B, B)}$.

Ainsi

$$\left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} \right| \leq n \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k}^2}$$

3. Montrons que $\forall A \in \mathcal{A}_n$ et $\forall S \in \mathcal{S}_n$, $\varphi(A, S) = 0$.

Dans un premier temps on a $\varphi(A, S) = \text{Tr}(A^\top S) = \text{Tr}(-AS)$ car A est antisymétrique

Dans un second temps, comme S est symétrique, $\text{Tr}(AS) = \text{Tr}(SA)$ et φ est symétrique, on a

$$\varphi(S, A) = \text{Tr}(S^\top A) = \text{Tr}(SA) = \text{Tr}(AS) = \text{Tr}(AS) = -\varphi(A, S) = \varphi(S, A)$$

Ainsi $\varphi(A, S) = 0$.

Finalement \mathcal{A}_n et \mathcal{S}_n sont deux sous-espaces orthogonaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Classique

cette question est pratiquement une question de cours, il faut absolument savoir la faire.

Cauchy-Schwarz

Si on vous demande de prouver une inégalité dans un problème faisant intervenir un produit scalaire penser à Cauchy-Schwarz doit être un réflexe, c'est bien souvent la réponse.

4. Soit U une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $U^T U = U U^T = I_n$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\Phi(MU) &= \sqrt{\varphi(MU, MU)} \\ &= \sqrt{\text{Tr}((MU)^T (MU))} \\ &= \sqrt{\text{Tr}((MU)(MU)^T)} \\ &= \sqrt{\text{Tr}(M U U^T M^T)} \\ &= \sqrt{\text{Tr}(M I_n M^T)} \\ &= \sqrt{\text{Tr}(M^T M)} \\ &= \Phi(M)\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\Phi(MU) = \Phi(M)}$.

5. (a) Soit $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(A_1, A_2) est une famille deux matrices non colinéaires, donc libre, et génératrice de F , c'est donc une base de F .

Pour $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $M \in F^\perp$ si et seulement si $\varphi(M, A_1) = 0$ et $\varphi(M, A_2) = 0$

Or $\varphi(M, A_1) = \alpha - \delta$ et $\varphi(M, A_2) = \beta + \gamma$.

Ainsi $M \in F^\perp$ si et seulement si $\delta = \alpha$ et $\gamma = -\beta$.

On a donc

$$F^\perp = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est donc une famille de deux matrices non colinéaires, donc libre, et génératrice de F^\perp .

Ainsi $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)}$ est donc une base de F^\perp .

(b) On a $\varphi(A_1, A_2) = 0$, $\Phi(A_1) = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ et $\Phi(A_2) = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Ainsi la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} A_1, \frac{1}{\sqrt{2}} A_2 \right)$ est une base orthonormée de F .

On a donc

$$\begin{aligned}A' &= \varphi(A, \frac{1}{\sqrt{2}} A_1) \frac{1}{\sqrt{2}} A_1 + \varphi(A, \frac{1}{\sqrt{2}} A_2) \frac{1}{\sqrt{2}} A_2 \\ &= \frac{\varphi(A, A_1)}{2} A_1 + \frac{\varphi(A, A_2)}{2} A_2 \\ &= \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{2} A_2 \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{A' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$.

Partie III

1. Soit $(P, Q, R) \in \mathbb{R}_3[X]^3$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\psi(\lambda P + Q, R) &= \sum_{i=0}^3 (\lambda P + Q)(i)R(i) \\ &= \lambda \sum_{i=0}^3 P(i)R(i) + \sum_{i=0}^3 Q(i)R(i) \\ &= \lambda\psi(P, R) + \psi(Q, R).\end{aligned}$$

Donc ψ est linéaire à gauche.

De plus, pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$, on a

$$\psi(Q, P) = \sum_{i=0}^3 Q(i)P(i) = \sum_{i=0}^3 P(i)Q(i) = \psi(P, Q)$$

Donc ψ est symétrique, étant déjà linéaire à gauche, elle est donc bilinéaire.

Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a

$$\psi(P, P) = \sum_{i=0}^3 P(i)^2 \geq 0.$$

Enfin, soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\psi(P, P) = 0$, on a alors $\sum_{i=0}^3 P(i)^2 = 0$.

Une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul. Ainsi

$$\forall i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \quad P(i) = 0$$

P est alors un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 qui possède au moins 4 racines. C'est nécessairement le polynôme nul, ainsi $\psi(P, P) = 0 \Rightarrow P = 0$.

Finalement, ψ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.

2. (a) On a

$$\psi(1, 1) = 4, \quad \psi(1, X) = 6 \quad \psi(1, X^2) = 14$$

$$\psi(X, X) = 14, \quad \psi(X, X^2) = 36 \quad \psi(X^2, X^2) = 98$$

(b) On reconnaît que (P_0, P_1, P_2) est la base orthonormée de F obtenue à partir de la base canonique $(1, X, X^2)$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

$$\text{— } \psi(1, 1) = 4, \text{ donc } P_0 = \frac{1}{\sqrt{\psi(1, 1)}} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{— On a } P_1 = \frac{X - \psi(X, P_0)P_0}{\psi(X - \psi(X, P_0)P_0, X - \psi(X, P_0)P_0)}$$

$$\text{Or } \psi(X, P_0) = \frac{1}{2}\psi(X, 1) = 3. \text{ Ainsi } X - \psi(X, P_0)P_0 = X - \frac{3}{2}$$

Puis

$$\psi\left(X - \frac{3}{2}, X - \frac{3}{2}\right) = \psi(X, X) - 2 \cdot \frac{3}{2}\psi(X, 1) + \frac{9}{4}\psi(1, 1) = 14 - 18 + 9 = 5$$

$$\text{Ainsi } P_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(X - \frac{3}{2}\right).$$

— On a

$$P_2 = \frac{X^2 - \psi(X^2, P_0)P_0 - \psi(X^2, P_1)P_1}{\psi(X^2 - \psi(X^2, P_0)P_0 - \psi(X^2, P_1)P_1, X^2 - \psi(X^2, P_0)P_0 - \psi(X^2, P_1)P_1)}$$

$$\text{Or } \psi(X^2, P_0) = \frac{1}{2}\psi(X^2, 1) = 7 \text{ et}$$

$$\psi(X^2, P_1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\psi(X^2, X) - \frac{3}{2}\psi(X^2, 1)\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(36 - 21) = \frac{15}{\sqrt{5}}$$

Ainsi

$$X^2 - \psi(X^2, P_0)P_0 - \psi(X^2, P_1)P_1 = X^2 - \frac{7}{2} - \frac{15}{5} \left(X - \frac{3}{2} \right) = X^2 - 3X + 1$$

Puis

$$\begin{aligned} \psi(X^2 - 3X + 1, X^2 - 3X + 1) &= \psi(X^2 - 3X + 1, X^2) - 3\psi(X^2 - 3X + 1, X) + \psi(X^2 - 3X + 1, 1) \\ &= \psi(X^2, X^2) - 6\psi(X, X^2) + 2\psi(1, X^2) + 9\psi(X, X) - 6\psi(1, X) + \psi(1, 1) \\ &= 98 - 216 + 28 + 126 - 36 + 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Ainsi $P_2 = \frac{1}{2}(X^2 - 3X + 1)$.

Finalement on a

$$P_0 = \frac{1}{2}, \quad P_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(X - \frac{3}{2}\right), \quad P_2 = \frac{1}{2}(X^2 - 3X + 1)$$

3. (a) Deux méthodes sont possibles :

— Poser $R(X) = a + bX + cX^2 + dX^3$ et résoudre le système :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b + c + d = 3 \\ a + 2b + 4c + 8d = 2 \\ a + 3b + 9c + 27d = 3 \end{cases}$$

Ce système a une unique solution : $\left(1, \frac{31}{6}, -4, \frac{5}{6}\right)$.

— Utiliser l'interpolation de Lagrange :

L'application $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^4$ est linéaire. Elle est injective, car si $P \in \text{Ker}(f)$, alors P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 ayant plus de 4 racines, c'est donc le polynôme nul.

Les espaces de départ et d'arrivée ayant même dimension, f est bijective. Ainsi $(1, 3, 2, 3)$ admet un unique antécédent R par f .

Si on veut une expression explicite de R , il s'agit du polynôme d'interpolation de Lagrange suivant

$$\begin{aligned} R(X) &= \frac{(X-1)(X-2)(X-3)}{-6} + 3 \frac{X(X-2)(X-3)}{2} \\ &\quad + 2 \frac{X(X-1)(X-3)}{-2} + 3 \frac{X(X-1)(X-2)}{6} \\ &= \frac{6 + 31X - 24X^2 + 5X^3}{6} \end{aligned}$$

Comme on n'a pas besoin de l'expression explicite de R pour la suite la seconde méthode est ici plus rapide.

(b) (P_0, P_1, P_2) est une base orthonormée de F d'après la question 2.(b).

Le projeté orthogonal de R sur F est alors :

$$p_F(R) = \psi(R, P_0)P_0 + \psi(R, P_1)P_1 + \psi(R, P_2)P_2$$

Or

$$\begin{aligned} \psi(R, P_0) &= R(0)P_0(0) + R(1)P_0(1) + R(2)P_0(2) + R(3)P_0(3) \\ &= P_0(0) + 3P_0(1) + 2P_0(2) + 3P_0(3) \\ &= \frac{1}{2}(1 + 3 + 2 + 1) \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Polynômes de Lagrange

Bien que classiques on ne s'attend pas ici à ce que vous redonniez sans indication ou questions préliminaires les formules des polynômes d'interpolation de Lagrange. La valeur explicite de R n'est d'ailleurs pas demandé et ne servira pas par la suite.

De même

$$\begin{aligned}\psi(R, P_1) &= P_1(0) + 3P_1(1) + 2P_1(2) + 3P_1(3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(1 \times \frac{-3}{2} + 3 \times \frac{-1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{3}{2} \right) \\ &= \frac{5}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\psi(R, P_2) &= P_2(0) + 3P_2(1) + 2P_2(2) + 3P_2(3) \\ &= \frac{1}{2} (1 - 3 - 2 + 3) \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}p_F(R) &= \psi(R, P_0)P_0 + \psi(R, P_1)P_1 + \psi(R, P_2)P_2 \\ &= \frac{9}{2}P_0 + \frac{\sqrt{5}}{2}P_1 - \frac{1}{2}P_2 \\ &= \frac{9}{4} + \frac{1}{2}\left(X - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{4}(X^2 - 3X + 1) \\ &= \frac{5 + 5X - X^2}{4}\end{aligned}$$

Enfinement le projeté orthogonal de R sur F est $\frac{5 + 5X - X^2}{4}$.

(c) On observe que, pour $P \in F$,

$$\sum_{i=0}^3 (x_i - P(i))^2 = \sum_{i=0}^3 (R(i) - P(i))^2 = \psi(R - P, R - P)$$

Ainsi minimiser la somme $\sum_{i=0}^3 (x_i - P(i))^2$, c'est exactement chercher la distance de R à F pour la norme euclidienne associée à ψ .

on sait que cette distance est atteinte uniquement quand P est le projeté orthogonal de R sur F : $p_F(R)$

Ainsi Σ admet un unique minimum.

D'après le théorème de Pythagore on a, comme $R = R - p_F(R) + p_F(R)$ et $p_F(R)$ et $R - p_F(R)$ sont orthogonaux, $\psi(R, R) = \psi(R - p_F(R), R - p_F(R)) + \psi(p_F(R), p_F(R))$.

Ainsi $\psi(R - p_F(R), R - p_F(R)) = \psi(R, R) - \psi(p_F(R), p_F(R))$.

De plus, comme la famille (P_0, P_1, P_2) est orthonormée et $p_F(R) = \psi(R, P_0)P_0 + \psi(R, P_1)P_1 + \psi(R, P_2)P_2$ alors, d'après le théorème de Pythagore

$$\begin{aligned}\psi(p_F(R), p_F(R)) &= \psi(R, P_0)^2 + \psi(R, P_1)^2 + \psi(R, P_2)^2 \\ &= \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{81 + 5 + 1}{4} \\ &= \frac{87}{4}\end{aligned}$$

De plus $\psi(R, R) = 1^2 + 3^2 + 2^2 + 3^2 = 23$

Pythagore

On aurait pu se lancer directement dans les calculs. Une utilisation intelligente de Pythagore va toutefois nous simplifier la vie et nous faire gagner du temps.

Ainsi

$$\psi(R - p_F(R), R - p_F(R)) = 23 - \frac{87}{4} = \frac{92 - 87}{4} = \frac{5}{4}$$

Finalement

$$\min \left\{ \sum_{i=0}^3 (x_i - P(i))^2, P \in F \right\} = \frac{5}{4}$$